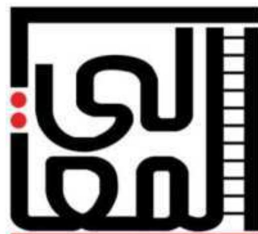
أولاً :

الجبر

$$\overset{2}{\boxed{3}}x^{\overset{1}{\boxed{2}}} - \overset{2}{\boxed{2}}xy + c$$

3 4 3 4 5

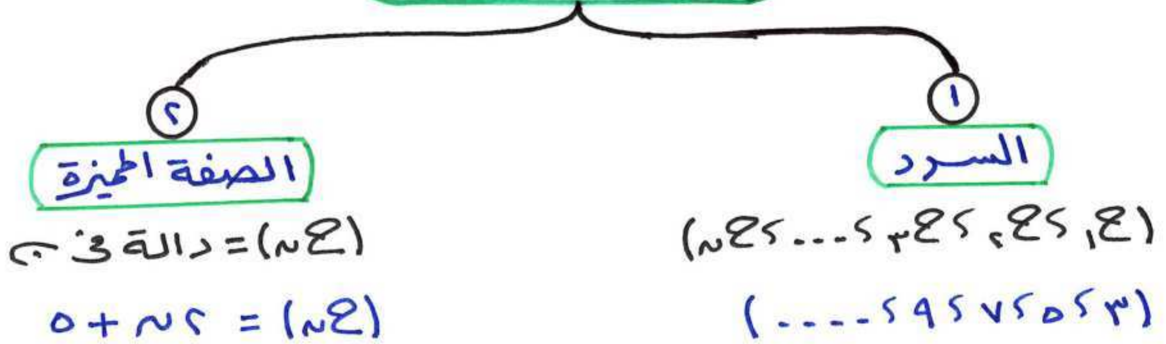


المتتابعات

المتتابعة الحقيقية هي دالة مجالها ص+ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل ح

∴ د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ....} ⟵ ح

طريقة كتابة المتتابعة



المتتابعة تكون



١) المتتابعة هي دالة مجالها

أ) ح+ ب) ص ج) ص+ د) ح

٢) الحد الرابع في المتتابعة (حن) حيث حن = $\frac{٧ن}{ن+١}$ هو

أ) ٢ ب) ٥ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) $\frac{٢}{٥}$

٣) في المتتابعة (حن) = ٣ن² − ١ إذا كان حن = ٧٤ فإن ن =

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٣ د) ٤

(٤) في المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_{ن+1} = ن ح_ن$ ، ن ≥ ١ إذا كان $ح_1 = 1$ فإن: $ح_٤ =$ ----

ﺃ) ١ ب) ٢ ﺟ) ٣ د) ٤

(٥) في المتتابعة ($ح_ن$) حيث $ح_ن = $ طا$(\frac{ط}{٤} ن)$ حدها الخامس =

ﺃ) ١ ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ﺟ) $\sqrt{٢}$ د) $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

الحد العام للمتتابعة يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث $ح_ن$ هو صورة العنصر الذي ترتيبه ن في المتتابعة ويسمى بالحد النوني

تدريب ٢ أكتب الحد العام من المتتابعات الآتية :-

(١) (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ----) $ح_ن =$

(٢) (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ----) $ح_ن =$

(٣) $(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ---)$ $ح_ن =$

(٤) $(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٧} ، \frac{١}{٩} ، ---)$ $ح_ن =$

ملاحظات

(١) إذا إختلفت إشارة كل حد عن إشارة الحد التالي له مباشرة فإن المتتابعة تكون متتابعة تذبذبية

(٢) متتابعة فيبوناتشي هي ($ح_ن$) = (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ---)

قاعدتها هي $ح_{ن+٢} = ح_ن + ح_{ن+١}$ لكل ن ∈ $ص^+$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

(٣) بعض المتتابعات ليس لها قاعدة معروفة وبالتالي ليس لها حد عام

(٤) سوف يتم شرح أنواع المتتابعات بعد ذلك ويتم إيجاد الحد العام بسهولة

المتسلسلات

المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ن}})$

قائمة مرتبة من الحدود

$(\text{ح}_1 ، \text{ح}_2 ، \text{ح}_3 ، \ldots ، \text{ح}_{\text{ن}})$ منتهية

$(\text{ح}_1 ، \text{ح}_2 ، \text{ح}_3 ، \ldots)$ غير منتهية

المتسلسلة $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$

جمع حدود المتتابعة الخاصة بها

$$\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ح}_{\text{ر}})$$

$$\text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \cdots = \sum_{\text{ر}=1}^{\infty} (\text{ح}_{\text{ر}})$$

تدريب ١

① $\sum_{\text{ر}=1}^{٤} \text{ر}^2 = (١)^2 + (٢)^2 + (٣)^2 + (٤)^2 = ٣٠$

② $\sum_{\text{ر}=1}^{٧} (٢\text{ر} - ١) = (٢ \times ١ - ١) + (٢ \times ٢ - ١) + (٢ \times ٣ - ١) + \cdots + (٢ \times ٧ - ١) = ٤٩$

ملحوظة: يمكن إستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد المسائل السابقة

خواص عملية التجميع Σ

1. $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{أ} \times \text{ن}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ $\Longleftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{١٥} ٣ = ٣ \times ١٥ = ٤٥$
2. $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{أ} \, \text{ح}_{\text{ر}} = \text{أ} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$ $\Longleftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{٤} ٥\text{ر}^3 = ٥ \sum_{\text{ر}=1}^{٤} \text{ر}^3$
3. $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ح}_{\text{ر}} \pm \text{ك}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}} \pm \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}$ $\Longleftarrow$ $\sum_{\text{ر}=1}^{٩} (٢\text{ر} + ٣) = \sum_{\text{ر}=1}^{٩} ٢\text{ر} + \sum_{\text{ر}=1}^{٩} ٣$

تدريب ٢

١) الحد الرابع في المتتابعة $(ح_ن) = ن^٢ + ٢$ هو

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٦ (د) ١٨

٢) الحد الخامس في متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥ هو

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

٣) الحد النوني للمتتابعة (١، ٤، ٩، ١٦، ...) هو

(أ) ٢ن (ب) ٤ن (جـ) $٢^ن$ (د) $ن^٢$

٤) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٣} ٣ر$ =

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٨

٥) المتسلسلة: ٥×١ + ٥×٢ + ٥×٣ + ... + ٥×١٠ تكتب باستخدام رمز التجميع ...

(أ) $\sum_{ر=١}^{١٠} ر$ (ب) $\sum_{ر=١}^{١٠} ٥ر$ (جـ) $\sum_{ر=١}^{١٠} ر^٥$ (د) $\sum_{ر=١}^{٢٠} ٥ر$

٦) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٤}^{٧} (٣ر - ١)$ تساوي

(أ) ٦٢ (ب) ٧٠ (جـ) ٧٥ (د) ٧٧

٦) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=٢}^{٥} (ر^٢ - ٢ر)$ =

(أ) ٢٦ (ب) ٢٧ (جـ) ١٢٦ (د) ١١٢

٧) قيمة المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٥} ٣$ يساوي

(أ) ١٥ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠

[redacted]

المتتابعة الحسابية

* تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حسابية إذا كان: $ح_{ن+1} - ح_ن =$ مقدار ثابت

لكل $ن \in ص^+$. يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الحسابية $= ء$

ملحوظة المتتابعة $(ح_ن)$ تكون حسابية إذا وفقط إذا كان حدها العام $ح_ن$ دالة من الدرجة الأولى في ن . ويكون أساسها $ء =$ معامل ن .

تدريب أي المتتابعات التالية حسابية ...

1) $(ح_ن) = ن^2 - 5ن + 1$ ⟸ ليست متتابعة حسابية — دالة من الدرجة الثانية

2) $(ح_ن) = \frac{1}{ن+2}$ ⟸ ليست متتابعة حسابية — دالة كسرية

3) $(ح_ن) = 3 \times 2^{ن+1}$ ⟸ ليست متتابعة حسابية — دالة أسية

4) $(ح_ن) = 5 - \frac{1}{2}ن$ ⟸ متتابعة حسابية — دالة كثيرة حدود درجة أولى

الحد العام (النوني) للمتتابعة الحسابية

$$ح_ن = أ + (ن - 1)\, ء$$

- $ح_ن$: قيمة الحد
- $أ$: الحد الأول
- $ن$: رتبة الحد
- $ء$: أساس المتتابعة

* الصورة العامة للمتتابعة الحسابية :

$(أ ، أ + ء ، أ + 2ء ، أ + 3ء ، \dots\dots ، ل)$ حيث ل الحد الأخير

تدريب ٢ في المتتابعة الحسابية (١ ، ٥ ، ٩ ، ---) أوجد :-

① قيمة الحد العاشر ② رتبة الحد الذي قيمته تساوي ١٢١

③ رتبة أول حد قيمته أكبر من ٣٠٠

الحل

الشرح الحد الأول أ = ١

أساس المتتابعة د = ح٢ − ح١ = ح٣ − ح٢ = ٤

① ح١٠ = أ + ٩د

= ١ + ٣٦

∴ ح١٠ = ٣٧

② ح_ن = ١٢١

أ + (ن − ١)د = ١٢١

١ + ٤ × (ن − ١) = ١٢١

١ + ٤ن − ٤ = ١٢١

٤ن = ١٢٤

∴ ن = ٣١

③ ح_ن > ٣٠٠

أ + (ن − ١)د > ٣٠٠

١ + ٤ × (ن − ١) > ٣٠٠

١ + ٤ن − ٤ > ٣٠٠

٤ن > ٣٠٣

ن > ٧٥,٧٥

∴ ن = ٧٦

ملاحظات

① لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته ل ⟸ ح_ن = ل

② لإيجاد رتبة أول حد موجب ⟸ ح_ن > ٠

③ لإيجاد رتبة أول حد سالب ⟸ ح_ن < ٠

④ لإيجاد رتبة أول حد قيمته > ل ⟸ ح_ن > ل

⑤ لإيجاد رتبة أول حد قيمته < ل ⟸ ح_ن < ل

⑥ لإيجاد عدد حدود المتتابعة ⟸ ح_ن = ل

تدريب ٣ في المتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ---) أوجد رتبة أول حد سالب

أ = ٤٥

د = −٤

ح_ن < ٠ ⟸ أ + (ن − ١)د < ٠

⟸

تدريب ٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٥، ١٠، ١٥، ...، ٩٥)

الحل

ح ن = ل

∴ أ + (ن − ١) ء = ل

∴

أ = ٥
ء = ٥
ل = ٩٥

تدريب ٥ إثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ في المتتابعة الحسابية (١٣، ١٧، ٢١، ...)

الحل

نفرض ح ن = ١٠٠

∴ أ + (ن − ١) ء = ١٠٠

∴

أ = ١٣
ء = ٤
ح ن = ١٠٠

تدريب للطلبة

(١) عدد حدود المتتابعة الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٢٧١) هو

(أ) ٣٤ (ب) ٦٧ (ج) ١٦٩ (د) ٩٢١٢

(٢) في المتتابعة الحسابية (١٢، ١٤، ١٦، ...) رتبة الحد الذي قيمته ١٠٢ يساوي

(أ) ٤٦ (ب) ٥١ (ج) ٩٢ (د) ٤٥

(٣) المتتابعة الحسابية (٣، ٥، ٧، ...) حدها النوني يساوي

(أ) ٣ن (ب) ٢ن + ١ (ج) ٥ن − ٢ (د) ٢ن

(٤) إذا كانت (٢٩، ك، ...، ٣ك، ٩٥) متتابعة حسابية فإن ك =

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (ج) ٩٥ (د) ١٢٤

تعيين المتتابعة الحسابية

تدريب ١ أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الثالث = ٨ وحدها السادس = ١٧

الحل

الشرح

$ح_{٣} = ٨$ ، $ح_{٦} = ١٧$

∴ $أ + ٢ء = ٨ \leftarrow I$ ، $أ + ٥ء = ١٧ \leftarrow II$

بحل المعادلتين I ، II ⇐ $أ = ٢$ ، $ء = ٣$

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) #

تدريب ٢ $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها $ح_{١} + ح_{٢} = ٩$ ، $ح_{٥} = ٢٢$ أوجد المتتابعة

الحل

تدريب ٣ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ومجموع حديها الخامس والتاسع ٤٠. أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥٢ في المتتابعة .

الحل

الشرح

$ح_{٤} = ١١$

$أ + ٣ء = ١١ \leftarrow I$

$ح_{٥} + ح_{٩} = ٤٠$

$أ + ٤ء + أ + ٨ء = ٤٠$

$٢أ + ١٢ء = ٤٠ \leftarrow II$

بحل المعادلتين I ، II

∴ $أ = ٢$ ، $ء = ٣$

∴ المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....)

$ح_{ن} = ١٥٢$

$٢ + (ن - ١) \times ٣ = ١٥٢$ ∴ $ن = ٥١$

تدريب ٤ أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوي ثلاثة أمثال حدها الثالث .

الحل

الشرح

ح٥ = ٢١ ، ح١٠ = ٣ح٣ ،

أ + ٤ء = ٢١ —— I

أ + ٩ء = ٣(أ + ء)

٢أ − ٦ء = ٠ —— II

بحل المعادلتين I ، II ⇐ أ = ٩ ، ء = ٣

∴ المتتابعة هي (٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ....)

تدريب ٥ أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

الحل

تدريب ٦ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، حن = ٣٩ ، ح٢ن = ٧٩ فما قيمة ن ؟ ثم أوجد المتتابعة .

الحل

الوسط الحسابي

* إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود في تتابع حسابي فإن ب يسمى وسط حسابي بين أ ، حـ ويكون: $ب = \frac{أ + حـ}{2}$ أي ٢ب = أ + حـ

تدريب ١ إذا كانت (ك + ٣ ، ٢ك + ٥ ، ٤ك ، ...) متتابعة حسابية أوجد قيمة ك

الحل

الشرح ∵ ع٢ وسط حسابي بين ع١ ، ع٣

∴ ٢ع٢ = ع١ + ع٣

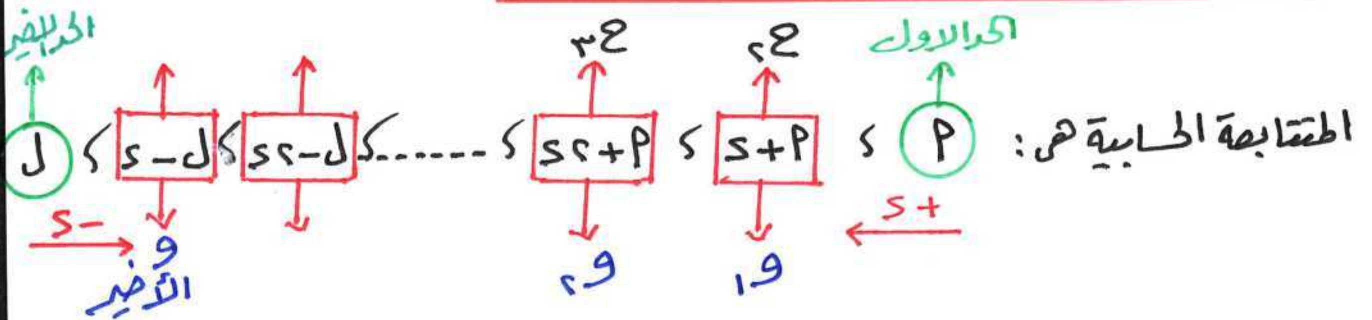
∴ ٢(٢ك + ٥) = ك + ٣ + ٤ك

∴ ٤ك + ١٠ = ٥ك + ٣ ⟸ ك = ٧

تدريب ٢ إذا كان الوسط الحسابي بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابي بين ٤أ ، ب هو ٢٠ فأوجد قيمة : أ ، ب

الحل

* إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل



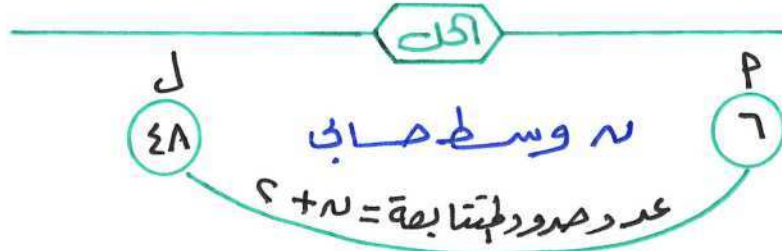
لاحظ الفرق ما بين الحد والوسط في المتتابعة الحسابية

$ح_٤ = أ + ٣ء$ $\quad$ $و_٤ = أ + ٤ء$

تدريب ٣ أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٦ ، ٤٨

الحل

الشرح



$ح_ن = ل$

$ل = أ + (ن - ١) ء$

$٤٨ = ٦ + ٦ ء$

$\therefore$ $\boxed{ء = ٧}$

$\therefore$ الأوساط هي

(١٣ ، ٢٠ ، ٢٧ ، ٣٤ ، ٤١)

تدريب ٤ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ٣ فما عدد الأوساط

الحل

أ ، ل



الوسطين الأولين $\qquad$ الوسطين الأخيرين

$\frac{٦ + ء + ٦ + ٢ء}{٣٦ - ء + ٣٦ - ٢ء} = \frac{١}{٣}$

$\frac{١٢ + ٣ء}{٧٢ - ٣ء} = \frac{١}{٣}$

$\frac{٣(٤ + ء)}{٣(٢٤ - ء)} = \frac{١}{٣}$

$\therefore$ $\boxed{ء = ٣}$

نفرض عدد الأوساط = ن

عدد الحدود = ن + ٢

$ح_{ن+٢} = ل$

$\therefore$ $٣٦ = ٣ \times (ن + ١) + ٦$

$\therefore$ $ن = ٩$

$\therefore$ عدد الأوساط = ٩

تدريب للطلبة

(١) في أي متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد

(أ) الخامس (ب) الرابع (ج) العاشر (د) السادس

(٢) إذا كان الوسط الحسابي للعددين س ، ٢٦ هو ٢١ فإن س =

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (ج) ٤٢ (د) ٢١

(٣) عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير =

(أ) ل − د (ب) ل (ج) ل − ٢د (د) ل + د

(٤) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن $\frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{ب} - \text{أ}}$ = ..

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

---

(٥) بدأ كريم في قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة في منحدر فقطع في الثانية الاولى ١٠٠ سم وفي كل ثانية تاليه بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم أوجد المسافة التي يقطعها في الثانية العاشرة . (١١٨٠ سم)

---

(٦) إشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النوني هو ١٢٠ ن + ٨ فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه أوجد عدد هذه الأقساط . (١١)

مجموع المتتابعة الحسابية

$$ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$$

$$ح_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$$

ملاحظات

(١) لايجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجباً ← $ح_ن > ٠$

(٢) لايجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالباً ← $ح_ن < ٠$

(٣) لايجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن ← عدد الحدود الموجبة

(٤) لايجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع أصغر ما يمكن ← عدد الحدود السالبة

تدريب ١ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...)

الحل

$∵ ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢×٥ + ٩×٣] = ١٨٥$

$أ = ٥$ ، $د = ٣$ ، $ن = ١٠$

تدريب ٢ أوجد مجموع المتتابعة الحسابية (٤ ، ٩ ، ١٤ ، ... ، ٧٤)

الحل

الشرح (i) يجب معرفة عدد حدود المتتابعة
(ii) نوجد بعد ذلك المجموع من بيانات المسألة

(i) $ع_ن = ل$

$أ + (ن-١)د = ل$

$٤ + (ن-١)×٥ = ٧٤$

$٤ + ٥ن - ٥ = ٧٤$

$٥ن - ١ = ٧٤$

$∴ ن = ١٥$

(ii) $ح_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$

$ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}[٤ + ٧٤]$

$∴ ح_{١٥} = ٥٨٥$

تدريب ٣ أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ---) إبتداء من حدها الاول ليكون مجموع هذه الحدود يساوى ٤٠٠

الحل

الشرح (i) $أ = ١$ $د = ٢$

(ii) $ح_ن = ٤٠٠$ والمطلوب ن

$\because ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن-١)د]$

$٤٠٠ = \frac{ن}{٢}[٢ + (ن-١)\times ٢]$

$٤٠٠ = \frac{ن}{٢}[٢ + ٢ن - ٢]$

$٤٠٠ = \frac{ن}{٢}[٢ن] \Leftarrow ٤٠٠ = ن^٢ \Leftarrow ن = ٢٠$ حداً

تدريب ٤ متتابعة حسابية حدها الاول = ٩ وحدها الأخير = ٦٥ ومجموع حدودها يساوى ٥٥٥ أوجد المتتابعة .

الحل

الشرح (i) نوجد أولاً عدد حدود المتتابعة

(ii) نوجد أساس المتتابعة د

$\because ح_ن = \frac{ن}{٢}[أ + ل]$

$٥٥٥ = \frac{ن}{٢}[٩ + ٦٥]$

$\therefore ن = ١٥$ حداً

$ح_ن = ل$

$٩ + ١٤د = ٦٥$

$١٤د = ٥٦ \Leftarrow د = ٤$

$\therefore$ المتتابعة (٩ ، ١٣ ، --- ، ٦٥)

تدريب ٥ إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة $ح_ن = ٢ن(ن+٣)$ أوجد المتتابعة وقيمة الحد العشرون

تدريب ٦

أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٥٠ ، ٤٦ ، ٤٢ ، ٣٨ ، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع موجباً .

الحل

الشرح (i) أ = ٥٠ ، د = -٤ (ii) لإيجاد عدد الحدود نضع جـن > ٠ (موجباً)

∵ جـن > ٠

∴ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) د] > ٠ ÷ $\frac{ن}{٢}$ [قبل التعويض]

∴ ٢ × ٥٠ + (ن - ١) × -٤ > ٠

٥٠ - ٤ن + ٤ > ٠ ⇐ ٥٤ > ٤ن

∴ ن < ١٣,٥ ⇐ **ن = ١٣**

تدريب ٧

مسرح به ٢٥ صفاً من الكراسي ، يحتوي الصف الأول على ٢٠ كرسياً ، ويحتوي الصف الثاني على ٢٢ كرسياً ويحتوي الصف الثالث على ٢٤ كرسياً وهكذا ، أوجد عدد الكراسي في جميع صفوف المسرح .

الحل

الشرح

صف أول	صف ثاني	صف ثالث	صف رابع	صف ٢٥
٢٠	٢٢	٢٤	٢٦	

واضح أن عدد الكراسي على شكل متتابعة حسابية

جـ٢٥ = $\frac{٢٥}{٢}$ [٢ × ٢٠ + ٢٤ × ٢] = ١١٠٠ كرسي

أ = ٢٠ ، د = ٢ ، ن = ٢٥

تدريب ٨

يدخر كريم من عمله اليومي ١٥ جنيهاً فإذا كان يدخر في كل يوم مبلغاً يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوماً

الحل

الشرح

اليوم ١	اليوم ٢	اليوم ٣	اليوم ١٥
١٥	١٧	١٩	

أ = ١٥ ، د = ٢ ، ن = ١٥

تدريب ٩

سقط جسم من إرتفاع ٤٩٠ متراً تحت تأثير الجاذبية الأرضية وبفرض اهمال المقاومة فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الاولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية ، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا ، أوجد :

١) المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة

٢) مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمانى الأولى

٣) متى يصل الجسم إلى سطح الأرض

الحل

الشرح

الثانية ١ (٤,٩)

الثانية ٢ (١٤,٧)

الثانية ٣ (٢٤,٥)

٤٩٠

المسافات المقطوعة تكون متتابعة

حسابية $أ = ٤,٩$ ، $د = ٩,٨$

١) $ح_٦ = أ + ٥ د$

$= ٤,٩ + ٥ \times ٩,٨ = ٥٣,٩$ متر

٢) $ح_٨ = \frac{٨}{٢} [٢ \times ٤,٩ + ٧ \times ٩,٨] = ٣١٣,٦$ متر

٣) $ح_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) د]$

$٤٩٠ = \frac{ن}{٢} [٢ \times ٤,٩ + (ن - ١) \times ٩,٨]$

$٤٩٠ = \frac{ن}{٢} [٩,٨ + ٩,٨ ن - ٩,٨] \Leftarrow ن = ١٠$ ثوانى

تدريب ١٠

يمتلك كريم محلاً تجارياً للسلع الغذائية ويقوم بترتيب علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ٢١ علبة والصف الذى يليه ١١ علبة والصف الذى يليه ١٠ علب وهكذا

١) أوجد عدد علب التونة فى الصف السابع [٦]

٢) فى أى صف تكون علب التونة ٣ علب ؟ [١٠]

٣) أوجد عدد علب التونة بدءاً من الصف الاول وحتى الصف الأخير الذى يحتوى على علبة واحدة [٧٨]

المتتابعة الهندسية

تعريف تسمى المتتابعة ($ح_ن$) متتابعة هندسية إذا كان: $ح_{ن+1} \div ح_ن =$ مقدار ثابت
لكل $ن \in ص^+$ ، $ح_ن \neq$ صفر
يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الهندسية ($ر$)

الحد العام للمتتابعة الهندسية $ح_ن = أ \times ر^{ن-1}$

* المتتابعة الهندسية حدودها هي (أ ، أ ر ، أ $ر^2$ ، ... ، $\frac{ل}{ر^2}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

تدريب ١ في المتتابعة الهندسية (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...) أوجد:
① قيمة الحد السابع ② رتبة الحد الذي قيمته ٢٥٦٠ ؟

الحل

الشرح (i) $أ = ٥$ (ii) $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

① $ح_٧ = أ ر^٦ = ٥ \times ٢^٦ = ٣٢٠$

② $ح_ن = ٢٥٦٠$
$أ \times ر^{ن-1} = ٢٥٦٠$
$٥ \times ٢^{ن-1} = ٢٥٦٠ \Leftarrow ٢^{ن-1} = ٥١٢ = ٢^٩ \Leftarrow ن - ١ = ٩ \Leftarrow$ $\boxed{ن = ١٠}$

تدريب ٢ في المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{١٢٨}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، $\frac{١}{٣٢}$ ، ....) أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٦٤

الحل

الشرح (i) $أ = \frac{١}{١٢٨}$ $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{١}{٦٤} \div \frac{١}{١٢٨} = ٢$

$\therefore \frac{١}{١٢٨} \times ٢^{ن-1} = ٦٤ \Leftarrow ٢^{ن-1} = ٦٤ \times ١٢٨ \Leftarrow ٢^{ن-1} = ٢^{١٣} \Leftarrow$ $\boxed{ن = ١٤}$

تدريب ٢

(١) جميع المتتابعات التالية هندسية ماعدا المتتابعة ..

(أ) (٣ ، -٦ ، ١٢ ، -٢٤ ، ....)
(ب) (لو أ ، لو $أ^٢$ ، لو $أ^٣$ ، لو $أ^٤$ ، ....)
(جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، ....)
(د) ($\frac{٣ب}{٢أ}$ ، ٣ ، $\frac{٦أ}{ب}$ ، $\frac{١٢أ^٢}{ب^٢}$ ، ....)

(٢) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هي ....

(أ) $(ح_ن) = (٤ن^٣)$ لكل ن ≥ ١
(ب) $(ح_ن) = (\frac{١}{٤} × ح_{ن-١})$ لكل ن ≥ ٢
(جـ) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$ لكل ن ≥ ١
(د) $(ح_ن) = (لو(٣ × ٢^ن))$ لكل ن ≥ ١

(٣) إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية (٤ س-٣ ، ٢س+٦ ، ....) هو

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

تدريب ٣

أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الرابع = ٨ وحدها السابع = ٦٤

الحل

الشرح: لإيجاد المتتابعة الهندسية نوجد (أ) ، (ر) عن طريق حل معادلتين بالقسمة

∴ $أ ر^٣ = ٨$ ← I
$أ ر^٦ = ٦٤$ ← II

II ÷ I ⟸ $\frac{أ ر^٦}{أ ر^٣} = \frac{٦٤}{٨}$ ⟸ $ر^٣ = ٨$ ⟸ **ر = ٢**

بالتعويض في I ⟸ ٨ أ = ٨ ⟸ **أ = ١** ∴ المتتابعة (١ ، ٢ ، ٤ ، ....)

تدريب ٤

إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتابعة هندسية = ٩ ومجموع الحدين السادس والسابع = ٢٨٨ أوجد المتتابعة

الحل

∵ $ح_١ + ح_٢ = ٩$
∴ أ + أ ر = ٩
∴ أ (١ + ر) = ٩ ← I

∵ $ح_٦ + ح_٧ = ٢٨٨$
∴ $أ ر^٥ + أ ر^٦ = ٢٨٨$
∴ $أ ر^٥ (١ + ر) = ٢٨٨$ ← II

II ÷ I ⟸ $ر^{٥} = ٣٢$ ⟸ **ر = ٢**

بالتعويض في I ⟸ **أ = ٣** ∴ المتتابعة هي (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ----)

تدريب ٥ متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_{٥} = ٩$ ، $ح_{٩} = \frac{١}{٩}$ أوجد المتتابعة

الحل

تدريب ٦ يصب الماء في خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة . فإذا صب في اليوم الأول ١٢ لتراً فبعد كم يوم يصب فيه ١٥٣٦ لتراً ؟

الحل

الشرح

١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ١٥٣٦

واضح أن الماء يكون متتابعة هندسية فيها أ = ١٢

ر = ٢

ل = ١٥٣٦

$ح_{ن} = ل$

$أ \times ر^{ن-١} = ل$

∴ $١٢ \times (٢)^{ن-١} = ١٥٣٦ \div ١٢$

∴ $(٢)^{ن-١} = ١٢٨ = ٢^{٧}$ ⟸ **ن = ٨** ∴ بعد ٨ أيام يصب ١٥٣٦ لتراً

تدريب ٧ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية في إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنوياً وكان عدد الطلاب حالياً ٤٠٠٠ طالب فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟

الحل

الشرح (i) عدد الطلاب حالياً ٢٤٠٠

(ii) بعد سنة = ٢٤٠٠ + ٢٤٠٠ × ٠٫٠٤ = ٢٤٠٠ × (١٫٠٤)

(iii) بعد سنتين = ٢٤٠٠ × (١٫٠٤) + ٢٤٠٠ × (١٫٠٤) × ٠٫٠٤ = ٢٤٠٠ × (١٫٠٤)^{٢}

واضح أن الزيادة تكون متتابعة هندسية أ = ٢٤٠٠ × ١٫٠٤

ر = ١٫٠٤

ح$_{٦}$ = أ ر^{٥} = ٢٤٠٠ × ١٫٠٤ × (١٫٠٤)^{٥} =

∴ ح$_{٦}$ = ٢٤٠٠ × (١٫٠٤)^{٦} = ٣٠٣٧ طالب

ملحوظة عند تكوين متتابعة هندسية وفيها نسبة مئوية أ٪

(i) إذا كان فيها زيادة ر = (١ + أ٪)

إذا كان فيها نقص ر = (١ − أ٪)

تدريب للطلبة

(١) إذا كانت (١ ، ك ، ٤ك − ٤) متتابعة هندسية فإن ك =

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٢) في المتتابعة الهندسية ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ...) حدها العاشر =

(أ) ٨ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ٢٨

(٣) موظف راتبه الشهري ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠٪ زيادة على راتبه في السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بعد مرور ٤ سنوات. [١٧٥٦٫٩]

الوسط الهندسى

تعريف إذا كان أ ، ب ، جـ متتابعة هندسية فإن ب وسط هندسى بين أ ، جـ

$ب = \pm \sqrt{أ\,جـ}$ ، $ب^2 = أ\,جـ$

ملاحظات

(١) الوسط الهندسى لأى كميتين يجب أن يكون لهما نفس الإشارة
[موجبين معاً أو سالبتين معاً]

(٢) يمكن ايجاد الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها "ن"

الوسط الهندسى الموجب $= \sqrt[ن]{أ \times ب \times جـ \times \dots}$

تدريب ١ عددان موجبان وسطهما الحسابى = ١٠ ووسطهما الهندسى يساوى ٦ أوجد العددين .

الحل

نفرض العددان س ، ص

الوسط الحسابى = ١٠

∴ س + ص = ٢٠

∴ ص = ٢٠ − س ⟵ I

الوسط الهندسى = ٦

∴ س ص = ٣٦ ⟵ II

بالتعويض من I فى II ⟸ س (٢٠ − س) = ٣٦

⟸ ٢٠ س − $س^2$ = ٣٦

⟸ $س^2$ − ٢٠ س + ٣٦ = ٠

∴ س = ٢ ، ∴ ص = ١٨

س = ١٨ ، ∴ ص = ٢

∴ العددان ٢ ، ١٨



ملحوظة

(١) لأى عددين حقيقيين موجبين ومختلفين الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

(٢) لأى عددين حقيقيين موجبين متساويين الوسط الحسابي = الوسط الهندسي

تدريب ٢

إذا كانت س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة في تتابع هندسي

إثبت أن : س + ل > ص + ع

الحل

∵ س ، ص ، ع في تتابع هندسي

∴ ص وسط هندسي بين س ، ع

∵ الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

∴ $\frac{س + ع}{٢} >$ ص ×٢

∴ س + ع > ٢ص ⟵ I

∵ ص ، ع ، ل في تتابع هندسي

∴ ع وسط هندسي بين ص ، ل

∴ الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

∴ $\frac{ص + ل}{٢} >$ ع ×٢

∴ ص + ل > ٢ع ⟵ II

بجمع I ، II ⟸ س + ع + ص + ل > ٢ص + ٢ع بحذف ص ، ع من الطرفين

∴ س + ل > ص + ع #

إدخال ن وسط هندسي بين أ ، ل



تدريب ٣

أدخل ٧ أوساط هندسية موجبة بين ٣ ، ٧٦٨

الحل

٣ ، عدد الأوساط = ٧ ، ٧٦٨

أ = ٣

ل = ٧٦٨

ن = ٧ + ٢ = ٩ حدود

$\because$ ح$_ن$ = ل

$\therefore$ أ × ر$^{ن-1}$ = ل

$\therefore$ ٣ × ر^{٨} = ٧٦٨ ÷ ٣

$\therefore$ ر^{٨} = ٢٥٦ ⟸ ر = ± ٢ $\because$ الأوساط موجبة $\therefore$ **ر = ٢**

$\therefore$ الأوساط هي : ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ---- ، ٣٨٤

تدريب ٤ إذا كانت ٤ ، ب ، ص في تتابع حسابي وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ص في تتابع هندسي أوجد قيمة ب ، ص

الحل

$\because$ ٤ ، ب ، ص في تتابع حسابي

$\therefore$ ب وسط حسابي بين ٤ ، ص

$\therefore$ ٢ب = ٤ + ص

$\therefore$ ص = ٢ب − ٤ ⟵ I

$\because$ ٢ ، ب + ٣ ، ٥ص في تتابع هندسي

$\therefore$ (ب + ٣) وسط هندسي بين ٢ ، ٥ص

$\therefore$ (ب + ٣)^{٢} = ١٠ص ⟵ II

بالتعويض من I في II ⟸ $\therefore$ ب^{٢} + ٦ب + ٩ = ٢٠ب − ٤٠

⟸ ب^{٢} − ١٤ب + ٤٩ = ٠

⟸ (ب − ٧)^{٢} = ٠ ⟸ **ب = ٧** ، **ص = ١٠**

تدريب ٥

(١) إذا كانت (س ، ص ، ع ، ...) في تتابع هندسي فإن :

(أ) ٢ص > س + ع (ب) ص^{٢} > س ع (جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

---

(٢) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن س + ص = ..

(أ) ١٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٤٢

---

(٣) إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكان حاصل ضرب الوسطين الثاني والأخير يساوي ٢٣٠٤ فإن عدد تلك الأوساط =

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

مجموع المتتابعة الهندسية

$ح_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ح_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ حيث $ر \neq ١$

تدريب ١: كم حداً تؤخذ من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ....) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٩٨٤١

الحل

أ = ١ ، ر = ٣ ، $ح_ن$ = ٩٨٤١ ، ن = ؟؟؟

$٩٨٤١ = \frac{١(٣^ن - ١)}{٣ - ١}$

$٣^ن - ١ = ١٩٦٨٢$

$٣^ن = ١٩٦٨٣ = ٣^٩ \Leftarrow$ ن = ٩

تدريب ٢: متتابعة هندسية حدها الأول = ٢ وحدها الأخير = ٢٥٦ ومجموع حدودها ٥١٠ أوجد المتتابعة .

الحل

أ = ٢ ، ل = ٢٥٦ ، $ح_ن$ = ٥١٠ ، ر = ؟؟؟

$ح_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$

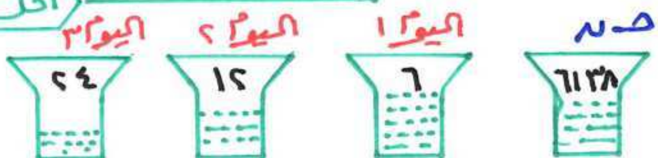
$٥١٠ = \frac{٢٥٦ ر - ٢}{ر - ١} \Leftarrow ٥١٠ ر - ٥١٠ = ٢٥٦ ر - ٢$

$\therefore ٢٥٤ ر = ٥٠٨ \Leftarrow$ ر = ٢

∴ المتتابعة هي (٢ ، ٤ ، ٨ ، ......)

تدريب ٣: خزان به ٦١٣٨ لتراً من الماء يتسرب منه في أول يوم ٦ لترات وفي اليوم الثاني ١٢ لتراً وفي اليوم الثالث ٢٤ لتراً وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً

الحل



مقدار التسرب يومياً يكون متتابعة هندسية أ = ٦ ، ر = ٢

$ح_ن = ٦١٣٨ \Leftarrow \therefore \frac{٦(٢^ن - ١)}{٢ - ١} = ٦١٣٨ \quad \div ٦$

$\Leftarrow ٢^ن - ١ = ١٠٢٣$

$\Leftarrow ٢^ن = ١٠٢٤ = ٢^{١٠} \Leftarrow$ **ن = ١٠**

$\therefore$ الخزان يصبح فارغاً بعد ١٠ أيام

تدريب ٤

إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم (في أحد الأوساط الغذائية) فكم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها في اليوم الاول ٨٠٠

الحل

٨٠٠ ، ١٦٠٠ ، ٣٢٠٠ ، .... ، ؟؟؟

$أ = ٨٠٠$

$ر = ٢$

$ن = ١٠$

$ح_ن = ؟؟؟$

$ح_{١٠} = \frac{٨٠٠ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٨١٨٤٠٠$

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

$ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر}$ حيث $|ر| < ١$ أي $-١ < ر < ١$

تدريب ٥

(١) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية (٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ...) هو

(أ) ١٢٠ (ب) ١٢٢ (جـ) ١٤٢ (د) ١٢٨

---

(٢) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الاول يساوى

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

تدريب ٦

متتابعة هندسية فيها $ح_٢ = ٥$ ، $ح_٤ = ٢٧ ح_٧$ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها ثم أوجد هذا المجموع

الحل

$ح_٢ = ٥$

$\therefore أ ر = ٥ \longleftarrow I$

$\therefore \frac{١}{٣} أ = ٥$

$\therefore أ = ١٥$

$ح_٤ = ٢٧ ح_٧$

$أ ر^٣ = ٢٧ أ ر^٦ \quad \div أ ر^٣$

$١ = ٢٧ ر^٣ \Leftarrow ر^٣ = \frac{١}{٢٧} \Leftarrow ر = \frac{١}{٣}$

$\because ر = \frac{١}{٣} < ١ \quad \therefore$ يمكن جمع المتتابعة الهندسية إلى ∞

$\therefore ج_\infty = \frac{١٥}{١ - \frac{١}{٣}} = ٢٢,٥$

الكسر العشري الدائري

$\frac{١}{٣} = ٠,٣٣٣٣...$ و يكتب للاختصار $٠,\overline{٣}$ و يسمى كسر عشري دائري

تدريب ٧

ضع العدد $٠,\overline{٧}$ على صورة كسر إعتيادي

الحل

أى كسر عشري دائري يكون على شكل متتابعة هندسية غير منتهية

$٠,\overline{٧} = ٠,٧٧٧ ...$

$٠,\overline{٧} = ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ...$

$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٧}{١ - ٠,١} = \frac{٧}{٩}$

$\therefore ٠,\overline{٧} = \frac{٧}{٩}$

مبدأ العد

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما = $م_1$

، عدد طرق إجراء عمل ثان = $م_2$

، عدد طرق إجراء عمل ثالث = $م_3$ ..... وهكذا

فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معاً = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times \cdots \times م_ن$

تدريب 1 شخص لديه ٥ قمصان ، ٣ بنطلونات . بكم طريقة يمكنه أن يشترى زى مكون من بنطلون وقميص

الحل

عدد طرق إختيار قميص = ٥   عدد طرق إختيار بنطلون = ٣

∴ عدد طرق إختيار الزى معاً = ٥ × ٣ = ١٥ طريقة

تدريب 2 بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

الحل

الشرح لاحظ هنا إن مبدأ العد مشروط :-

(i) العدد أرقامه مختلفة يعني مينفعش ٣٣٢ وهكذا

(ii) رقم المئات مينفعش صفر

∴ عدد طرق إختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ (لأننا استبعدنا صفر)

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ (برضو استبعدنا رقم المئات)

عدد طرق إختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة

آحاد	عشرات	مئات
٢	٣	٣

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن ⌊ن يساوي حاصل ضرب جميع الاعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه أو تساوي ن

⌊ن = ن (ن−١)(ن−٢)× --- × ٣ × ٢ × ١

ملاحظات

١) ن ∈ ص+

٢) ⌊٠ = ⌊١ = ١

٣) ⌊ن = ن ⌊ن−١ = ن (ن−١) ⌊ن−٢ = ---- وهكذا

٤) يمكن إستخدام الآلة الحاسبة لايجاد ⌊العدد [x!]

تدريب ١

١) ⌊٣ =

٢) ⌊٤ =

٣) ⌊٥ =

٤) ⌊١٠٠ / ⌊٩٨ =

تدريب أوجد قيمة ن إذا كان :-

١) ⌊ن = ٢٤

٢) ⌊ن−١ = ١٢٠

الحل

١)
∵ ⌊ن = ٢٤
∴ ⌊ن = ⌊٤
∴ ن = ٤

٢)
⌊ن−١ = ١٢٠
⌊ن−١ = ⌊٥
ن−١ = ٥
∴ ن = ٦

تدريب ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة :-

(١) ن! = ٣٠ (ن − ٢)!   (٢) (ن − ١)! = ١

الحل

(١)

ن! = ٣٠ (ن − ٢)!

ن (ن − ١) (ن − ٢)! = ٣٠ (ن − ٢)!

ن (ن − ١) = ٣٠

ن² − ن − ٣٠ = ٠

ن = ٦   ،   ن = −٥ مرفوض

∴ م.ح = {٦}

(٢)

∵ (ن − ١)! = ١

∴ (ن − ١)! = ٠!   ،   (ن − ١)! = ١!

∴ ن − ١ = ٠   ،   ن − ١ = ١

ن = ١   ،   ن = ٢

∴ م.ح = {١ ، ٢}

تدريب ٤ بكم طريقة يستطيع ٤ طلاب الجلوس :

(١) في صف واحد   (٢) حول نضد دائري

الحل

(١)

عدد طرق إختيار الطالب الاول = ٤

عدد طرق إختيار الطالب الثاني = ٣

عدد طرق إختيار الطالب الثالث = ٢

عدد طرق إختيار الطالب الرابع = ١

∴ عدد طرق الاختيار = ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٢٤ طريقة

(٢)

الطالب الاول ليس له إختيار حتى يكون البداية

عدد طرق إختيار الطالب الثاني = ٣

عدد طرق إختيار الطالب الثالث = ٢

عدد طرق إختيار الطالب الرابع = ١

∴ عدد طرق الاختيار = ٣ × ٢ × ١

= ٦ طرق

ملحوظة عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في شكل :-

(١) صف واحد = ن!   (٢) دائرة = (ن − ١)!

تمهيد من الارقام التالية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ بكم طريقة يمكن تكوين :-

(١) عدد من رقمين مختلفين   (٢) مجموعة من عنصرين

الحل

(١) ← (٢) (٣) (٤)   (٢) ← (١) (٣) (٤)   (٣) ← (١) (٢) (٤)   (٤) ← (١) (٢) (٣)

٢١ ٣١ ٤١ ١٢ ٣٢ ٤٢

١٣ ٢٣ ٤٣ ١٤ ٢٤ ٣٤

عدد الطرق = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

لاحظ

* العدد يحتاج ترتيب آحاد ثم عشرات
* الاعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤
* عدد الاعداد (التبديلات) تسمى تباديل
* عدد الطرق = $^{4}ل_{2}$ = ١٢ طريقة



{١ ، ٢} {١ ، ٣} {١ ، ٤}

{٢ ، ٣} {٢ ، ٤} {٣ ، ٤}

عدد الطرق = ٦

لاحظ

* المجموعة لا تحتاج ترتيب
* المجموعة لا يتكرر العنصر فيها
* عدد المجموعات السابقة تسمى توافيق

∴ عدد الطرق = $^{4}ق_{2}$ = ٦ طرق

التباديل

* $^{ن}ل_{ر}$ هي عدد طرق ترتيب (ن) من العناصر المختلفة في (ر) من الأماكن

(ن) يسمى العلم ، (ر) يسمى دليل

الشروط

(i) $^{ن}ل_{ر}$ = عدد صحيح موجب $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$

(ii) ن عدد صحيح موجب $ن \in ص^{+}$

(iii) $٠ \leq ر \leq ن$ $٠ \leq$ دليل $\leq$ العلم

قوانين التباديل

① $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)\cdots(ن-ر+١)$ — فك التباديل إلى عوامل متتالية أكبر عامل ن

② $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$ — $^{علم}ل_{دليل} = \dfrac{|\underline{علم}}{|\underline{علم - دليل}}$

③ $^{ن}ل_{٠} = ١$ ④ $^{ن}ل_{١} = ن$ ⑤ $^{ن}ل_{ن} = |\underline{ن}$

ملحوظة يمكن ايجاد التباديل باستخدام الآلة الحاسبة nPr

تدريب ٥

① $^{٨}ل_{٣} =$

② $^{١٠}ل_{٢} =$

③ $^{٧}ل_{٤} =$

تدريب ٦ إذا كان $^{٧}ل_{ر} = ٨٤٠$ أوجد قيمة $|\underline{ر-٤}$

الحل

$\because\ ^{٧}ل_{ر} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٧}ل_{٤}$

$\therefore ر = ٤$

$\therefore |\underline{ر-٤} = |\underline{٠} = ١$

باستخدام الحاسبة يمكن الحل

$^{٧}ل_{ر} = {}^{٧}ل_{\cdots}$

$\therefore ر = \cdots$

تدريب ٧ أوجد قيمة ن :

① $^{ن}ل_{٥} = ٢٥٢٠$ ② $|\underline{ن} = ٥٠٤٠$

الحل

$^{ن}ل_{٥} = {}^{٧}ل_{٥}$

$\therefore ن = ٧$

$|\underline{ن} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$|\underline{ن} = |\underline{٧} \quad \therefore ن = ٧$

تدريب ٨ أوجد قيمة ن

① $^{ن}ل_{٠} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢} = ٥٠$

② $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$

الحل

①
$١ + ن + ن(ن-١) = ٥٠$

$ن + ن^٢ - ن = ٤٩$

$ن^٢ = ٤٩$

∴ ن = ٧ ، ن = −٧ مرفوض

②
$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣) = ١٤ \times (ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)$

$ن^٢ - ن = ١٤ن - ٥٦$

$ن^٢ - ١٥ن + ٥٦ = ٠$

ن = ٧ ، ن = ٨

تدريب ٩

① $^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوي

أ) ١٥ ب) ١٦ ج) ١٧ د) ٢٠

② عدد الأزواج المرتبة (أ، ب) التي يمكن تكوينها من عناصر {١، ٢، ٣} حيث أ ≠ ب هو

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٦ د) ٩

③ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي

أ) ١ ب) ٤ + ٤ ج) ٤ × ٤ د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

④ إذا كان : $\underline{|ن}^{\,1} = ١٢٠$ فإن قيمة $^{ن}ل_{٣}$ =

أ) ٧٢٠ ب) ٢٧٠ ج) ١٢٠ د) ٢٤٠

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{\underline{٢ن-١}} = ١٢$ فإن ن = ...

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

⑥ لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً . بكم طريقة يمكن إختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

أ) ٢ ب) ٢٣ ج) ٦٦ د) ١٣٢

التوافيق

$^{ن}ق_{ر}$ = عدد المجموعات الجزئية المحتوية على (ر) من العناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة بها (ن) من العناصر

الشروط
- (i) $^{ن}ق_{ر}$ = عدد صحيح موجب
- (ii) ن ، ر $\in$ ص+
- (iii) $٠ \leq ر \leq ن$

لاحظ أن
- ① $^{ن}ق_{٠} = ١$
- ② $^{ن}ق_{ن} = ١$
- ③ $^{ن}ق_{١} = ن$

قوانين التوافيق

① $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!}$

② $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ قانون التبسيط

تدريب ١: إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠\ {}^{ن}ق_{ر}$ فأوجد $^{١٢}ق_{٢ر}$

الحل

لاحظ المسألة تحتوي تباديل وتوافيق ولهما نفس العلم والدليل

∴ نستخدم هذا القانون للاختصار

∴ $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠ \times \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$ بحذف $^{ن}ل_{ر}$

∴ $ر! = ٧٢٠$

∴ $ر! = ٦!$ ⟸ $ر = ٦$

∴ $^{١٢}ق_{٢ر} = {}^{١٢}ق_{١٢} = ١$

تدريب ٢: إذا كان: $^{ن}ق_{ن-٣} = ٥٦$ أوجد قيمة ن

الحل

لاحظ العلم فيه ن والدليل فيه ن ولحذف ن من الدليل نستخدم هذا القانون

∴ $^{ن}ق_{ن-٣} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-٣)}$

∴ $^{ن}ق_{٣} = ٥٦$

وباستخدام الحاسبة nCr

∴ $^{ن}ق_{٣} = {}^{٨}ق_{٣}$ ∴ ن = ٨

(٣) قانون التساوي : إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$

فإن : $س = ص$ أو $س + ص = ن$

تدريب ٣ إذا كان ${}^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر - ٤٧}$ أوجد قيمة $ر$

الحل

لاحظ أن : العلم = العلم ، تساوي توفيقتين ∴ نستخدم قانون التساوي

إما : $ر = ٢ر - ٤٧$ أو $ر + ٢ر - ٤٧ = ٢٨$

∴ $ر = ٤٧$ مرفوض $٣ر = ٧٥$

لأن بالتعويض هايكون الدليل > العلم ∴ $ر = ٢٥$

تدريب ٥ إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٣} \cdot {}^{ن}ل_{٣}$ ؛ ن أوجد قيمة ن

الحل

$\frac{{}^{ن}ل_{٣}}{٣ \underline{|}\; {}^{ن-٣}ل} = \frac{٩١}{٣} ن \Leftarrow \frac{ن(ن-١)(ن-٢)\; {}^{ن-٣}ل}{٦ \; {}^{ن-٣}ل} = \frac{٩١}{٣} ن$ بالاختصار

∴ $(ن-١)(ن-٢) = ١٨٢$

∴ $ن^٢ - ٣ن + ٢ = ١٨٢$

$ن^٢ - ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$ن = ١٥$ ، $ن = -١٢$ مرفوض

حل آخر : لاحظ حاصل ضرب عاملين متتاليين لذلك نحول الى تباديل

∴ ${}^{ن-١}ل_{٢} = ١٨٢$

${}^{ن-١}ل_{٢} = {}^{١٤}ل_{٢} \Leftarrow ن = ١٥$

تدريب ٦ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر-١} = ٦٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر-١} = ٥٦$ فما قيمة ن ، ر

الحل

تدريب ٧
إشترك ٧ أشخاص في مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين أوجد عدد مباريات المسابقة.

الحل

العدد الكلي ٧ والعدد المختار ٢ ولا يوجد ترتيب ∴ نستخدم التوافيق

∴ عدد طرق الاختيار = $^{7}C_{2}$ = ٢١ طريقة

تدريب ٨
إذا كان لدينا ٢٠ طالب و ١٠ طالبات فبكم طريقة يمكن تكوين لجنة من:

(١) ٤ طلاب وطالبتين (٢) ٤ طلاب أو طالبتين

الحل

لاحظ أن هناك عمليتين للاختيار عملية إختيار طلاب وعملية إختيار طالبات
الترتيب في العمليتين ليس مهم لذلك هانستخدم التوافيق

	طلاب	طالبات
العدد الكلي	٢٠	١٠
العدد المختار	٤	٢

(١) عدد طرق تكوين ٤ طلاب (و) طالبتين = $^{20}C_{4} \times {}^{10}C_{2}$ = ٢١٨٠٢٥

(٢) عدد طرق تكوين ٤ طلاب (أو) طالبتين = $^{20}C_{4} + {}^{10}C_{2}$ = ٤٨٩٠

ملحوظة:
(١) إذا كان الربط بين إختيارين و نقوم بعملية × ناتج الاختيارين
(٢) إذا كان الربط بين إختيارين أو نقوم بعملية + ناتج الاختيارين

تدريب ٩
فصل به ٩ أولاد و ٦ بنات يراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس

لاحظ أن (i) عندنا عمليتين إختيار والترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق
(ii) عملية الاختيار من نفس الجنس معناه ولاد فقط أو بنات فقط

∴ عدد طرق تكوين فريق أولاد فقط أو بنات فقط نستخدم +

	أولاد	بنات
العدد الكلي	٩	٦
العدد المختار	٤	٤

∴ عدد طرق الأختيار = $^{٩}ق_{٤}$ + $^{٦}ق_{٤}$ = ١٤١

تدريب ١٠ يكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية؟

الحل

لاحظ أن: (i) إختيار اللجنة الترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق
(ii) اللجنه ٥ أعضاء وقرار الأغلبية موافقه ٥ أو ٤ أو ٣

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٥}ق_{٥}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٣}$ = ١٦ طريقة

تدريب ١١ يدرس الطالب في إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يكون له الانتقال الى السنة التالية إلا إذا نجح في ٦ منها على الأقل، بكم طريقة يمكن للطالب الانتقال الى السنة التالية؟

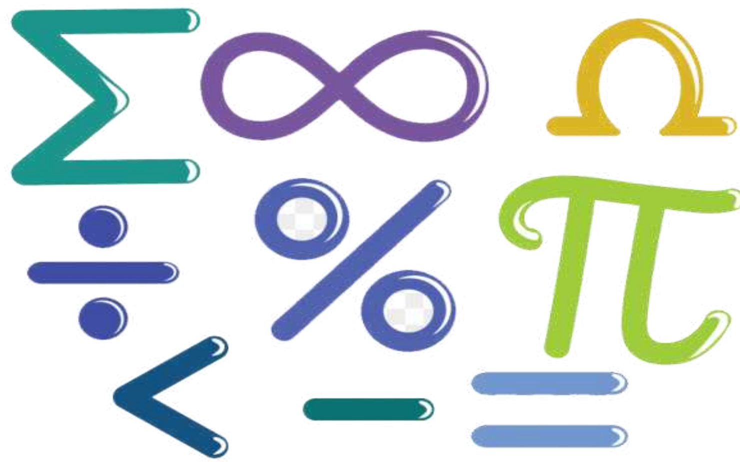
الحل

لاحظ أن: (i) إختيار الأسئلة الترتيب ليس هام لذلك نستخدم التوافيق
(ii) الطالب عليه الإجابة على ٦ أسئلة أو ٧ أسئلة أو ٨ أسئلة

∴ عدد طرق الأختيار = $^{٨}ق_{٦}$ + $^{٨}ق_{٧}$ + $^{٨}ق_{٨}$ = ٣٧ طريقة

نهاية الجبر "إن كان من خطأ فمن نفسي والشيطان"

ثانياً :
التفاضل والتكامل





معدل التغير

دالة التغير إذا كانت : ص = د(س)

إذا تغيرت س : $س_1 \longrightarrow س_2$ فإن مقدار التغير في س يرمز له بالرمز Δس أي هـ $\Leftarrow$ هـ $= س_2 - س_1$

الدالة د(س) : $د(س_1) \longrightarrow د(س_2)$ فإن مقدار التغير في الدالة د(س) يرمز له بالرمز Δص أي ت (هـ)

حيث : ت (هـ) = د(س + هـ) − د(س) وتسمى دالة التغير

تدريب 1 إذا كانت : د(س) = ٣س² + س − ٢ أوجد :

(1) دالة التغير (2) مقدار التغير عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣

الحل

(1) د(س) = ٣س² + س − ٢ ⟵ I

د(س + هـ) = ٣(س + هـ)² + (س + هـ) − ٢

∴ د(س + هـ) = ٣س² + ٦س هـ + ٣هـ² + س + هـ − ٢ ⟵ II

بطرح : II − I ⟸ ∴ ت (هـ) = ٦س هـ + ٣هـ² + هـ دالة التغير

(2) س : ٢ ⟵ ٢,٣ (س = ٢ ، هـ = ٠,٣) هـ = ٢,٣ − ٢ = ٠,٣

∴ ت (٠,٣) = ٦ × ٢ × ٠,٣ + ٣(٠,٣)² + ٠,٣ = ٤,١٧

دالة متوسط التغير

م(هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}}$

تدريب ٢: أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د(س) = س² + ٢ ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١

الحل

د(س) = س² + ٢ ← I

د(س + هـ) = (س + هـ)² + ٢

= س² + ٢ س هـ + هـ² + ٢ ← II

II − I ⟸ ت(هـ) = ٢ س هـ + هـ² دالة التغير

م(هـ) = $\frac{هـ (٢ س + هـ)}{هـ}$ = ٢ س + هـ دالة متوسط التغير

∵ س : ٣ ← (س = ٣ ، هـ = ٠,١) ← ٣,١

∴ متوسط التغير م = ٦ + ٠,١ = ٦,١

معدل التغير: معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

تدريب ٣: أوجد معدل التغير للدالة د : د(س) = ٣ س² + ٢ عند س = ٢

الحل

د(س) = ٣ س² + ٢ ← I

د(س + هـ) = ٣ (س + هـ)² + ٢

= ٣ س² + ٦ س هـ + ٣ هـ² + ٢ ← II

(i) دالة التغير ت(هـ) = ٦ س هـ + ٣ هـ²

(ii) دالة متوسط التغير م(هـ) = ٦ س + ٣ هـ   (÷ هـ)

(iii) معدل التغير = $\lim_{هـ \to 0}$ ٦ س + ٣ هـ

= ٦ س   عند س = ٢

∴ معدل التغير = ١٢

ملحوظة لاحظ الفرق بين: دالة متوسط التغير و متوسط التغير

دالة متوسط التغير $م(هـ) = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ ‖ متوسط التغير $م = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١}$

تدريب ٤ صفيحة مربعة تتمدد بانتظام محتفظة بشكلها إحسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ثم إحسب معدل التغير في مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم .

الحل

نفرض : طول ضلع الصفيحة = س

المساحة : مساحة المربع = $س^٢$

∴ $د(س) = س^٢$

$س_١$	$س_٢$	هـ
٣	٣,٤	٠,٤

(i) متوسط التغير $م = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{د(٣,٤) - د(٣)}{٣,٤ - ٣}$

∴ $م = \frac{(٣,٤)^٢ - (٣)^٢}{٠,٤} = ٦,٤$

(ii) عند س = ٥ ⟸ معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٥+هـ) - د(٥)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[(٥+هـ)^٢] - [٥]^٢}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢٥ + هـ^٢ + ١٠هـ - ٢٥}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} هـ + ١٠$

∴ معدل التغير في المساحة $= ١٠$

تدريب ٥

(١) معدل تغير الدالة د : د(س) = س٢ عند س = ١ هو

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

(٢) متوسط تغير الدالة د حيث د(س) = س٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫١ = ..

(أ) ٠٫٦١ (ب) ٦٫١ (جـ) ٩ (د) ٩٫٦١

(٣) متوسط التغير في د يساوي ٧ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ وكانت د(٣) = ٨ فإن د(٥) =

(أ) ٢٢ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) غير ذلك

(٤) متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥سم إلى ٧سم = ..

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

(٥) إذا كان متوسط التغير في د يساوي ٤٫٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣٫٢ فإن التغير في د =

(أ) ٠٫٣٢ (ب) ٠٫٤٨ (جـ) ٣٫٦ (د) ٧٫٢

(٦) إذا كان متوسط التغير في د يساوي ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ وكان د(٢) = ٦ فإن د(٤) =

(أ) -٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٧) يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أي لحظة زمنية ن (بالدقائق) بالعلاقة : د(ن) = ٢ن٣ + ١٠٠ ملليجرام فإن معدل النمو اللحظي للدالة د عندما ن = ٥ يساوي ..

(أ) ١٥٠ (ب) ١٠٥ (جـ) ٢٥٠ (د) ٣٥٠

قواعد الإشتقاق

(1) إذا كان: $ص = س^{ن}$ فإن: $\frac{دص}{دس} = ن س^{ن-1}$ حيث $ن \in ح$

ملاحظات

(1) إذا كانت $ص = أ$ فإن $\frac{دص}{دس} = صفر$ حيث أ ثابتة

إذا كانت $ص = أ س^{ن}$ فإن $\frac{دص}{دس} = أ \times ن س^{ن-1}$ حيث $أ \in ح$

إذا كانت $ص = س$ فإن $\frac{دص}{دس} = 1$

تدريب 1 أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(1) $ص = س^{5}$
$ص' =$

(2) $ص = 7 س^{3}$
$ص' =$

(3) $ص = 9 س$
$ص' =$

(4) $ص = \frac{4}{3} ط س^{3}$
$ص' =$

(5) $ص = \sqrt{3}$
$ص' =$

(6) $ص = 6 \sqrt{س}$
$ص' =$

تدريب 2 أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(1) $ص = \frac{1}{س}$

(2) $ص = \frac{5}{س^{2}}$

(3) $ص = \sqrt{س}$

(3) $ص = س \sqrt{س}$

ملحوظة

(1) إذا كانت $ص = \frac{أ}{س}$ فإن $ص' = \frac{-أ}{س^{2}}$

(2) إذا كانت $ص = \sqrt{دالة}$ فإن $ص' = \frac{\text{مشتقة الدالة } د'(س)}{2\sqrt{دالة}}$

٢) مشتقة مجموع أو الفرق بين دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س
وكانت ص = د(س) ± ر(س) فإن: $\frac{دص}{دس}$ = د̄(س) ± ر̄(س)

تدريب ٣) أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :-

١) ص = ٣س^٤ − ٥س^٢ + ٣س + ٩
ص̄ =

٢) ص = س (٣س^٢ − ٥س + ٤)
ص̄ =

٣) ص = $\frac{٥}{س}$ + س√س + √٢ س + ٩
ص̄ =

٣) مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت: د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س
وكانت : ص = د(س) × ر(س) فإن: ص̄ = د̄(س) × ر(س) + ر̄(س) × د(س)

أي أن: الدالة الأولى × مشتقة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

تدريب ٤) أوجد $\frac{دص}{دس}$ للدالة ص = (س^٢ + ٣)(س^٣ − ٣س + ١)

الحل

$\frac{دص}{دس}$ = (س^٢ + ٣) ، (٢س) + (س^٣ − ٣س + ١) ، (٣س^٢ − ٣)

= (س^٢ + ٣)(٣س^٢ − ٣) + (٢س)(س^٣ − ٣س + ١)

تدريب ٥ إذا كانت: ص = (س^٤ + ١)(س^٣ + ٣) أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل

$\frac{دص}{دس} = (س^٤+١)(٣س^٢) + (٤س^٣)(س^٣+٣) = (س^٤+١)(٣س^٢) + (٤س^٣)(س^٣+٣)$

$\left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=١} = (١+١)(٣) + (٤)(١+٣) = ١٤$

تدريب ٦ إذا كانت: ص = (س − ١)(س + ١)(س^٢ + ١)(س^٤ + ١)(س^٨ + ١)(س^١٦ + ١)

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢

الحل

٤) مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت: د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت: ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ ٠

فإن: $\frac{دص}{دس} = \frac{د'(س) \times ر(س) - ر'(س) \times د(س)}{[ر(س)]^٢}$

$= \frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^٢}$

تدريب ٧ إذا كانت ص = $\frac{٣س + ٤}{٥س + ١}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣ \times (٥س+١) - ٥ \times (٣س+٤)}{(٥س+١)^٢} = \frac{-١٧}{(٥س+١)^٢}$

٥) مشتقة قوس مرفوع لأس

إذا كانت: $ص = [د(س)]^{ن}$ فإن: $\frac{دص}{دس} = ن[د(س)]^{ن-1} \times \bar{د}(س)$

أى أن: $ص = (قوس)^{ن}$ فإن: $\bar{ص} = ن\,(قوس)^{ن-1} \times$ (مشتقة القوس)

تدريب ٨

١) $ص = (٣س^{٢} + ٥س)^{٣}$ $\qquad \frac{دص}{دس} =$

٢) $ص = \frac{١٥}{(٢س+٣)^{٧}}$ $\qquad \frac{دص}{دس} =$

٣) $ص = \sqrt{٣س+٤}$ $\qquad \frac{دص}{دس} =$

تدريب ٩

١) معدل تغير الدالة د حيث $د(س) = س^{١٥}$ عند $س = ١$ هو

أ) ١ ب) ١٥ جـ) ١٤ د) صفر

٢) إذا كانت: $\frac{د}{دس}(أ س^{٣}) = ٢٤$ فإن قيمة أ عندما $س = ١$ تساوى

أ) ٨ ب) ٢ جـ) ١ د) ٢٤

٣) إذا كانت $د(س) = \frac{١}{س}$ فإن $\bar{د}(١) =$

أ) ١ ب) صفر جـ) -١ د) ٢

٤) إذا كانت $د(س) = س^{٥}$ فإن: $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} =$

أ) ٥ ب) $٥س^{٤}$ جـ) $س^{٥}$ د) غير موجودة

٥) اذا كانت $\bar{د}(٢) = ٥$ ، $د(س) = س^{٢} + م س + ٥$ فإن م =

أ) ٥ ب) ٢ جـ) ١٠ د) ١

٦) مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت: ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن: ص = د[ر(س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

تدريب ١٠: إذا كانت: ص = $ع^٥$ ، ع = $س^٢ - ٣س + ١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

ص = $ع^٥$ ← I

ع = $س^٢ - ٣س + ١$ ← II

بالتعويض من II في I

∴ ص = $(س^٢ - ٣س + ١)^٥$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ - ٣س + ١)^٤ \times (٢س - ٣)$

أو:

ص = $ع^٥$ ∴ $\frac{دص}{دع} = ٥ع^٤$

ع = $س^٢ - ٣س + ١$ ∴ $\frac{دع}{دس} = ٢س - ٣$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= ٥ع^٤ \times (٢س - ٣)$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(س^٢ - ٣س + ١)^٤ \times (٢س - ٣)$

تدريب ١١: إذا كانت ص = $(ع + ١)^٥$ ، ع = $س^٣ - ١$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ١

الحل

ص = $(ع + ١)^٥$ ← I

ع = $س^٣ - ١$ ← II

∴ ص = $(س^٣ - ١ + ١)^٥$

ص = $(س^٣)^٥ = س^{١٥}$

$\frac{دص}{دس} = ١٥س^{١٤}$

عند س = ١ ⟸ $\frac{دص}{دس} = ١٥ \times ١ = ١٥$

أو:

$\frac{دص}{دع} = ٥(ع + ١)^٤ \times (١)$

$\frac{دع}{دس} = ٣س^٢$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(ع + ١)^٤ \times (٣س^٢)$

عند س = ١ ∴ ع = صفر

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥(٠ + ١)^٤ \times (٣)$

∴ $\frac{دص}{دس} = ١٥$

ملحوظة إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

تدريب ١٢

① $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{4}) = 4\text{ص}^{3}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ② $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{7}) = 7\text{ص}^{6}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

③ $\frac{\text{ء}}{\text{ءع}}(\text{س}^{5}) = 5\text{س}^{4}\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ ④ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{5}) = 5\text{س}^{4}$

تدريب ١٣ إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^{2} + \text{ع}$ ، $\text{ع} = 2\text{س}^{2}$ إثبت أن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 16\text{س}^{3}$

الحل

$\text{ص} = \text{ع}^{2} + \text{ع}$ $\text{ع} = 2\text{س}^{2}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 2\text{ع} + 1$ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 4\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (2\text{ع} + 1) \times 4\text{س}$

$= (4\text{س}^{2} + 1) \times 4\text{س} = 16\text{س}^{3} + 4\text{س}$

$\text{ط}_1 = 16\text{س}^{3} + 4\text{س} - 4\text{س} = 16\text{س}^{3}$ #

تدريب ١٤ إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^{2} + 3\text{ع} + 5$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{2} + 5}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = 2$

الحل

$\text{ص} = \text{ع}^{2} + 3\text{ع} + 5$ $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{2} + 5}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 2\text{ع} + 3$ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^{2} + 5}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = (2\text{ع} + 3) \times \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{2} + 5}}$

عند $\text{س} = 2$ $\therefore \text{ع} = \sqrt{4 + 5} = 3$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (3 \times 2 + 3) \times \frac{2}{\sqrt{4 + 5}} = 6$

تدريب ١٥

(١) $\frac{د}{دس}$ (ص^{٥}) =

أ) ٥ص^{٤} ب) ٥ص^{٤} صَ جـ) ص^{٥} صَ د) $\frac{٥ص^{٤}}{صَ}$

(٢) إذا كانت ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ) $\frac{-١}{٢\sqrt{س}}$ ب) $\frac{-١}{٢س}$ جـ) $\frac{-١}{٢س\sqrt{س}}$ د) $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٣) إذا كانت ص = ع^{٢} ، ع = ٣س^{٢} - ٢ فإن $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢ تساوي

أ) ٢٤ ب) ٢٤٠ جـ) ٤٢٠ د) ١٢٠

(٤) إذا كانت ص = (س^{٢} - ٢)^{٥} فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ) ٥(س^{٢} - ٢)^{٤} ب) ١٠س(س^{٢} - ٢)^{٤} جـ) ٢٢س^{٥} د) ٢س(س^{٢} - ٢)^{٥}

(٥) إذا كانت ص = (ع + ١)^{٣} ، ع = س^{٥} - ١ فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ) س^{١٥} ب) س^{٨} جـ) ١٥س^{١٤} د) ٨س^{٧}

(٦) إذا كانت ص = (س + ل)^{٣} ، $\frac{دص}{دس}$ = ١٢ عند س = صفر فإن ل =

أ) ٢ ب) ± ٢ جـ) - ٢ د) ٤

(٧) إذا كانت ص^{٤} = س^{٣} فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ) $\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{١}{٤}}$ ب) $\frac{س^{٢}}{٤ص^{٣}}$ جـ) $\frac{٣س^{٢}}{٣ص}$ د) $\frac{٣}{٤\sqrt[٣]{س}}$

(٨) إذا كانت د(س) = $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ فإن دَ(-٤) =

أ) $\frac{-٤}{٥}$ ب) ٥ جـ) $\frac{١}{١٠}$ د) $\frac{-١}{١٠}$

تطبيقات على المشتقة

* ميل الخط المستقيم

① م = $\frac{-ب}{أ}$ إذا علم معادلة أس + ب ص + جـ = ٠

② م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ إذا علم نقطتين على المستقيم (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

③ م = ظا θ إذا صنع المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية "θ"

④ م = $\frac{ب}{أ}$ إذا علمت معادلة الاتجاهية ر = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

ملاحظات

① المستقيم الذي يوازي محور السينات ← ميله = صفر

② المستقيم الذي يوازي محور الصادات ← ميله = غير معرف = $\frac{1}{0}$

③ إذا كان ل١ // ل٢ فإن م١ = م٢

④ إذا كان ل١ ⊥ ل٢ فإن م١ × م٢ = -١

* ميل المنحنى

ميل المماس للمنحنى : هو المشتقة الأولى للدالة عند نقطة التماس (س١ ، ص١)

ميل المماس = $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(س_1 ، ص_1)}$

معادلة المماس: $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = م$ معادلة العمودي: $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{-1}{م}$

تدريب ١ أوجد ميل المماس للمنحنى $ص = ٢س^٣ - س^٢ + ١$ عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: (١، ٢)

(ii) المنحنى: $ص = ٢س^٣ - س^٢ + ١$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٦س^٢ - ٢س$ بالتعويض عند س = ١

$م = ٦ - ٢ = ٤$

تدريب ٢ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $ص = س^٣ - س^٢ + ٣$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١، ٣) الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: (١، ٣)

(ii) المنحنى: $ص = س^٣ - س^٢ + ٣$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٣س^٢ - ٢س$ عند س = ١

$م = ٣ - ٢ = ١$

$\because م = ظا\theta \quad \therefore ظا\theta = ١ \Leftarrow \theta = ٤٥^\circ$

تدريب ٣ أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى $ص = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتي إحداثيها السيني يساوي ٢

الحل

(i) نقطة التماس: س = ٢ نوجد ص = ٢ × ٨ − ٤ × ٤ + ٣ = ٣ (٢، ٣)

(ii) المنحنى: $ص = ٢س^٣ - ٤س^٢ + ٣$

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٦س^٢ - ٨س$ عند س = ٢

$م = ٦ × ٤ - ٨ × ٢ = ٨$

∴ معادلة المماس: $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = ٨$

ص − ٨س + ١٣ = ٠

معادلة العمودي $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{-١}{٨}$

∴ ٨ص + س − ٢٦ = ٠

تدريب ٤ أوجد معادلة العمودي لمنحنى الدالة ص = س٢ + ٢س − ٣ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور السينات

الحل

(i) نقطة التماس: لايجاد نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س٢ + ٢س − ٣ = ٠

∴ س = ١ ∴ ص = ٠ ∴ (١، ٠)

٢ س = −٣ ص = ٠ ∴ (−٣، ٠)

(ii) المنحنى: ص = س٢ + ٢س − ٣

(iii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$

عند النقطة (١، ٠)

$م_١ = ٤$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٠}{س - ١} = \frac{-١}{٤}$

∴ ٤ص + س − ١ = ٠

عند النقطة (−٣، ٠)

$م_٢ = -٤$

$\frac{ص - ٠}{س + ٣} = \frac{١}{٤}$

∴ ٤ص − س − ٣ = ٠

تدريب ٥ أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ص = س٢ − ٥س + ٤ والتى ميل المماس للمنحنى عندها يساوى ٥

الحل

(i) المنحنى: ص = س٢ − ٥س + ٤

(ii) ميل المماس: $\frac{دص}{دس} = ٢س - ٥$

(iii) الشرط: $\frac{دص}{دس} = ٥$ ⇐ ٢س − ٥ = ٥ ⇐ س = ٥

بالتعويض: ∴ ص = ٤ ∴ النقطة (٥، ٤)

تدريب 6: أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^3 - 2س + 5$ والتي عندها المماس للمنحنى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^3 - 2س + 5$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = 3س^2 - 2$

(iii) الشرط : $\frac{دص}{دس} = ظا 45° = 1$

$\therefore 3س^2 - 2 = 1$

$\therefore س = 1 \qquad \therefore ص = 1 - 2 + 5 = 4$

$س = -1 \qquad \therefore ص = -1 + 2 + 5 = 6$

النقط هي $(1 ، 4)$ ، $(-1 ، 6)$

تدريب 6: أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^3 - 9س^2 + 24س - 15$ والتي يكون المماس عندها موازياً محور السينات

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^3 - 9س^2 + 24س - 15$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = 3س^2 - 18س + 24$

(iii) الشرط : المماس // محور السينات $\therefore \frac{دص}{دس} = 0$

$\therefore 3س^2 - 18س + 24 = 0$

$\therefore س = 2 \qquad \therefore ص = 8 - 36 + 48 - 15 = 5$

$س = 4 \qquad \therefore ص = 64 - 144 + 96 - 15 = 1$

$\therefore$ النقط هي : $(2 ، 5)$ ، $(4 ، 1)$

تدريب 7: أوجد قيمة $أ$ التي تجعل المستقيم $ص = 4س + أ$ مماس للمنحنى $ص = س^2 + 5$

الحل

(i) المنحنى : $ص = س^2 + 5$

(ii) ميل المماس : $\frac{دص}{دس} = 2س$

(iii) الشرط : المستقيم يمس المنحنى

∴ ميل المستقيم = ميل المنحنى

٤ = ٢س ⟸ س = ٢

⟸ ص = ٤ + ٥ = ٩

∴ ص = ٤س + أ

٩ = ٤ × ٢ + أ ⟸ أ = ١

تدريب ٨

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جاس جتاس يساوي

(أ) جتاس جاس (ب) جتا^٢س − جا^٢س

(جـ) جاس − جتاس (د) جا^٢س + جتا^٢س

(٢) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢س − ٣)^٥ عند س = ٢ يساوي

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٣) إذا كانت معادلة العمودي للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (٢، −١) هي س − ٢ص = ٤ فإن د̄(٢) =

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

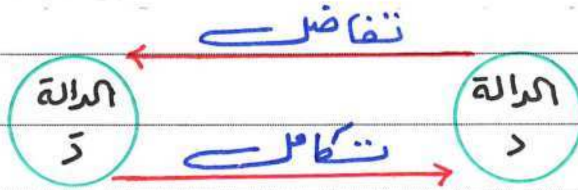
(٤) إذا كان المستقيم ص + س = ١ يمس منحنى الدالة د(س) = س^٢ − ٣س + أ فإن أ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كان المماس للمنحنى ص = س^٣ − ٣س^٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة فإن س ∈

(أ) [٠، ٢] (ب)]٠، ٢[(جـ) ح − [٠، ٢] (د) ح −]٠، ٢[

التكامل



قاعدة

$\int \text{س}^{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}+1}\text{س}^{\text{ن}+1} + \text{ث}$ حيث ث ثابت التكامل ، ن $\neq -1$

تدريب ١

① $\int \text{س}^{6}\,\text{ء س} = \frac{1}{7}\text{س}^{7} + \text{ث}$

② $\int \frac{1}{\text{س}^{4}}\,\text{ء س} = \int \text{س}^{-4}\,\text{ء س} = \frac{-1}{3}\text{س}^{-3} + \text{ث}$

③ $\int \sqrt[3]{\text{س}}\,\text{ء س} = \int \text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{ء س} = \frac{1}{\frac{4}{3}}\text{س}^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$

④ $\int \text{س}^{\frac{3}{5}}\,\text{ء س} =$

خواص التكامل إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإنه :-

① $\int \text{أ}\,\text{ء س} = \text{أ س} + \text{ث}$ حيث أ ثابت $\neq$ صفر

② $\int \text{أ}\,\text{د(س)}\,\text{ء س} = \text{أ}\int \text{د(س)}\,\text{ء س}$ حيث أ ثابت $\neq$ صفر

③ $\int [\text{د(س)} \pm \text{ر(س)}]\,\text{ء س} = \int \text{د(س)}\,\text{ء س} \pm \int \text{ر(س)}\,\text{ء س}$

تدريب ٢

① $\int 7\,\text{ء س} = 7\,\text{س} + \text{ث}$

② $\int \pi\,\text{ء س} = \pi\,\text{س} + \text{ث}$

③ $\int 4\,\text{س}\,\text{ء س} = \frac{4\,\text{س}^{2}}{2} + \text{ث} = 2\,\text{س}^{2} + \text{ث}$

تدريب ٣

① $\int (\text{٤س} + ٥)\, \text{دس} = \frac{\text{٤س}^{٢}}{٢} + \text{٥س} + \text{ث}$

$= \text{٢س}^{٢} + \text{٥س} + \text{ث}$

② $\int (\text{س}^{٢} - \text{٦س} + ٤)\, \text{دس} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{٦س}^{٢}}{٢} + \text{٤س} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{٣س}^{٢} + \text{٤س} + \text{ث}$

③ $\int ٢(\text{٣ع}^{٢} - ٥)\, \text{دع} = \int (\text{٦ع}^{٢} - ١٠)\, \text{دع}$

$= \frac{\text{٦ع}^{٣}}{٣} - \text{١٠ع} + \text{ث}$

$= \text{٢ع}^{٣} - \text{١٠ع} + \text{ث}$

④ $\int (\text{أس}^{٢} - \text{بس} + \text{جـ})\, \text{دس} = \frac{\text{أس}^{٣}}{٣} - \frac{\text{بس}^{٢}}{٢} + \text{جـس} + \text{ث}$

$= \frac{\text{أ}}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{\text{ب}}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـس} + \text{ث}$

تدريب ٤

① $\int \text{س}(\text{س} + ٣)\, \text{دس} = \int (\text{س}^{٢} + \text{٣س})\, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{٢}(\text{٢س} + \frac{١}{\text{س}})\, \text{دس} = \int (\text{٢س}^{٣} + \text{س})\, \text{دس}$

$= \frac{\text{٢س}^{٤}}{٤} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٤} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

(٣) $\int (\text{س}+5)(\text{س}+3)\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{س}^2 + 8\text{س} + 15)\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{\text{س}^3}{3} + \frac{8\text{س}^2}{2} + 15\text{س} + \text{ث}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 + 4\text{س}^2 + 15\text{س} + \text{ث}$

(٤) $\int (\text{س} + \frac{1}{\text{س}})^2\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{س}^2 + 2 + \frac{1}{\text{س}^2})\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (\text{س}^2 + 2 + \text{س}^{-2})\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{\text{س}^3}{3} + 2\text{س} - \text{س}^{-1} + \text{ث}$

تدريب ٥

(١) $\int \frac{3\text{س}^2 - 4\text{س}}{\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = \int (3\text{س} - 4)\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{3\text{س}^2}{2} - 4\text{س} + \text{ث}$

$= \frac{3}{2}\text{س}^2 - 4\text{س} + \text{ث}$

(٢) $\int \frac{\text{س}^7 + 5\text{س}^6 - \text{س}^3}{\text{س}^3}\, \text{ء}\text{س} = \int (\text{س}^4 + 5\text{س}^3 - 1)\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{\text{س}^5}{5} + \frac{5\text{س}^4}{4} - \text{س} + \text{ث}$

$= \frac{1}{5}\text{س}^5 + \frac{5}{4}\text{س}^4 - \text{س} + \text{ث}$

(٣) $\int \frac{4\text{س}^2 - 9}{2\text{س} - 3}\, \text{ء}\text{س} = \int \frac{(2\text{س}-3)(2\text{س}+3)}{(2\text{س}-3)}\, \text{ء}\text{س}$

$= \int (2\text{س} + 3)\, \text{ء}\text{س}$

$= \frac{2\text{س}^2}{2} + 3\text{س} + \text{ث}$

$= \text{س}^2 + 3\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \frac{س^3 - 27}{س - 3}\, دس = \int \frac{(س-3)(س^2+3س+9)}{(س-3)}\, دس$

$= \int (س^2 + 3س + 9)\, دس$

$= \frac{س^3}{3} + \frac{3س^2}{2} + 9س$

$= \frac{1}{3}س^3 + \frac{3}{2}س^2 + 9س + ث$

قاعدة

$\int (أس+ب)^{ن}\, دس = \frac{1}{أ} \times \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{ن+1} + ث$

حيث ث ثابت ، $ن \neq -1$

تدريب ٦

① $\int (2س+5)^{7}\, دس = \frac{(2س+5)^{8}}{2 \times 8} + ث$

$= \frac{1}{16}(2س+5)^{8} + ث$

② $\int (7-4س)^{6}\, دس = \frac{(7-4س)^{7}}{7 \times -4} + ث$

$= \frac{-1}{28}(7-4س)^{7} + ث$

③ $\int \frac{5}{(3س+2)^{7}}\, دس = \int 5(3س+2)^{-7}\, دس$

$= \frac{5(3س+2)^{-6}}{-6 \times 3} + ث$

$= \frac{-5}{18}(3س+2)^{-6} + ث$



٤) $\int \sqrt{٢س+٧}\ دس = \int (٢س+٧)^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$= \dfrac{(٢س+٧)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٢} + ث$

$= \dfrac{١}{٣}(٢س+٧)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥) $\int [(٢س-٥)^٤ + ٣]\ دس = \int (٢س-٥)^٤\ دس + \int ٣\ دس$

$= \dfrac{(٢س-٥)^٥}{٥ \times ٢} + ٣س + ث$

$= \dfrac{١}{١٠}(٢س-٥)^٥ + ٣س + ث$

تدريب ٧

١) $\int (س^٢ - ٣)\ دس =$

أ) $٢س$ ب) $س^٣ - ٣س$ ج) $\frac{١}{٣}س^٣ - ٣س + ث$ د) $٢س - ٣ + ث$

٢) $\int (س+٢)(س-٢)\ دس =$

أ) $س + ٤ + ث$ ب) $\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س + ث$ ج) $س^٣ - ٤س + ث$ د) $(س^٢ - ٤)^٢ + ث$

٣) $\int \dfrac{س^٢ + ٣س}{س}\ دس =$

أ) $س + ٣$ ب) $\frac{١}{٢}س^٢ + ٣س + ث$ ج) $س^٢ + ٣س + ث$ د) $\dfrac{س^٢ + ٣س}{س^٢}$

٤) إذا كان: $\int س^ك\ دس = \frac{١}{٣}س^٣ + ث$ فإن ك = ..

أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د) ٣

[redacted]

الإحتمالات

التجربة العشوائية هى تجربة معروف نتائجها الممكنة قبل اجراؤها ولكننا لا نستطيع تحديد أى النواتج سيتحقق عند إجراؤها .

فضاء العينة هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما

ملاحظات
* يرمز لفضاء العينة بالرمز "ف" ويرمز لعدد عناصره ن(ف)
* يمثل فضاء العينة بالشجرة البيانية أو الشبكة البيانية

تدريب ١

١) أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ؟

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ن(ف) = ٦

٢) أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين ؟

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

ن(ف) = ٤

الأحداث

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الحدث

١) الحدث المؤكد (ف) : هو حدث لابد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

٢) الحدث المستحيل : هو الحدث الذى لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

٣) الحدث البسيط : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى على عنصر واحد فقط .

تدريب ٢ في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه . أكتب الإحداث التالية

١) أ : حدث وقوع عدد فردى
٢) ب : حدث وقوع عدد زوجى
٣) حـ : حدث ظهور عدد أولى
٤) ء : حدث ظهور عدد أكبر من ٧
٥) هـ : حدث ظهور عدد بين ٣ ، ٥
٦) و : حدث ظهور عدد أقل من ٧

الحل

فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

١) أ = {١ ، ٣ ، ٥}
٢) ب = {٢ ، ٤ ، ٦}
٣) حـ = {٢ ، ٣ ، ٥}
٤) ء = { } = ϕ
٥) هـ = {٤}
٦) و = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

العمليات على الأحداث

التقاطع أ ∩ ب

حدث وقوع أ (و) ب

حدث وقوع أ ، ب (معاً)

ف ، ب ، أ

الاتحاد أ ∪ ب

حدث وقوع أ (أو) ب

حدث وقوع أحدهما على الأقل

ف ، ب ، أ

الفرق (أ - ب)

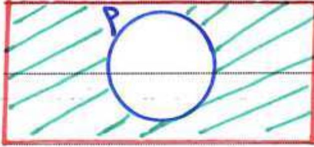
حدث وقوع أ (فقط)

حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

ف ، ب ، أ

حدث عدم وقوع أ

الحدث المكمل $\bar{أ}$



تدريب ٣

صندوق به بطاقات مرقمة من ١ إلى ٧ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً ولوحظ الرقم عليها أكتب فضاء العينة ثم أوجد الأحداث التالية:-

(١) أ حدث الحصول على عدد فردى
(٢) ب حدث الحصول على عدد أولى
(٣) حدث وقوع أ ، ب معاً
(٤) حدث وقوع أ أو ب
(٥) حدث وقوع أ فقط
(٦) حدث عدم وقوع أ

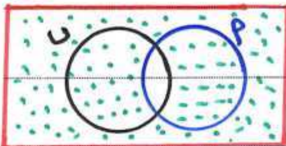
الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

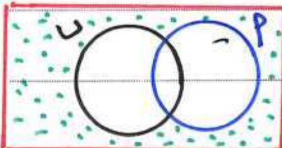
(١) أ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}
(٢) {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}
(٣) أ ∩ ب = {٣ ، ٥ ، ٧}
(٤) أ ∪ ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}
(٥) أ − ب = {١}
(٦) $\bar{أ}$ = {٢ ، ٤ ، ٦}

ملاحظات

(١) $(أ \cap ب)' = أ' \cup ب'$
حدث عدم وقوع أ و ب معاً
حدث وقوع أحدهما على الأكثر

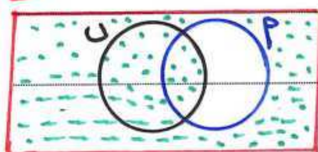


(٢) $(أ \cup ب)' = \bar{أ} \cap \bar{ب}$
حدث عدم وقوع أى من الحدثين
حدث عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

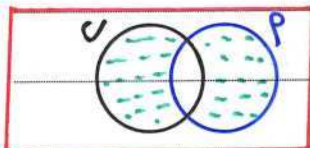


ف

٣) $(أ - ب)' = أ' \cup ب$ حدث عدم وقوع أ فقط
حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ



٤) $(أ - ب) \cup (ب - أ)$
$= (أ \cup ب) - (أ \cap ب)$
حدث وقوع أحد الحدثين فقط
حدث وقوع أ فقط أو ب فقط



٥) يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا وفقط إذا كان: $أ \cap ب = \phi$

٦) $أ \cup \bar{أ} = ف$ ، $أ \cap \bar{أ} = \phi$

٧) $(أ - ب) = أ \cap \bar{ب}$ حدث وقوع أ و عدم وقوع ب

٨) إذا كان $أ \subset ب$ فإن :
$أ \cup ب = ب$ $أ \cap ب = أ$ $أ - ب = \phi$

(تدريب ٤) ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ولوحظ الوجه العلوي لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوي لحجر النرد مثل فضاء العينة بشكل شجري ثم أوجد الأحداث الآتية:

١) أ حدث ظهور كتابة وعدد زوجي
٢) ب حدث ظهور صورة وعدد فردي
٣) جـ حدث وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب
٤) د حدث وقوع الحدث أ فقط
٥) هـ حدث عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب

حساب الإحتمال

مثال تمهيدي في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.
أكتب فضاء العينة، ثم أوجد الأحداث التالية :-

(١) أ حدث وقوع عدد زوجي (٢) ب حدث وقوع عدد يتحصر بين ٣ ، ٦

(٣) ج حدث وقوع عدد أكبر من ٧ (٤) د حدث وقوع عدد أقل من ٧

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ∴ ن(ف) = ٦ عدد العناصر

(١) أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ن(أ) = ٣ عدد عناصر الحدث أ

حساب إحتمال وقوع الحدث أ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

(٢) ب = {٤ ، ٥} ن(ب) = ٢ عدد عناصر الحدث ب

حساب إحتمال وقوع الحدث ب = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)}$

(٣) ج = { } = ϕ ن(ج) = صفر

حساب إحتمال وقوع الحدث ج = $\frac{صفر}{٦}$ = صفر = $\frac{ن(ج)}{ن(ف)}$

(٤) د = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ن(د) = ٦ عدد عناصر الحدث د

حساب إحتمال وقوع الحدث د = $\frac{٦}{٦}$ = ١ = $\frac{ن(د)}{ن(ف)}$

---

* **حساب الاحتمال** إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما فإن إحتمال وقوع أي حدث أ ⊂ ف هو :-

ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{عدد عناصر أ}{عدد عناصر ف}$

مسلمات الاحتمال

١) إذا كان أ ⊂ ف فإنه يوجد عدد حقيقي يسمى إحتمال وقوع الحدث أ
ويكون: صفر ≤ ل(أ) ≤ ١ أي أن ل(أ) ∈ [١-، ١]

٢) ل(ف) = ١ أي أن إحتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

٣) ل(∅) = صفر أي أن إحتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر

٤) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من ف فإن:
ل(أ ∩ ب) = ∅ ، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

قوانين الاحتمالات

١) ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

(i) إحتمال وقوع أ و ب (ii) احتمال وقوع أ ، ب معاً

٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

(i) إحتمال وقوع أ أو ب (ii) إحتمال وقوع أحدهما على الأقل

٣) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

(i) إحتمال وقوع أ وعدم وقوع ب (ii) إحتمال وقوع أ فقط

٤) ل(أَ) = ١ − ل(أ)

⑤ ل(أ̄ ∪ ب̄) = ل(أ ∩ ب)′ = ١ − ل(أ ∩ ب)

(i) احتمال عدم وقوع الحدثين معاً (ii) احتمال وقوع أحدهما على الأكثر

⑥ ل(أ̄ ∩ ب̄) = ل(أ ∪ ب)′ = ١ − ل(أ ∪ ب)

(i) احتمال عدم وقوع أي من الحدثين (ii) احتمال عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

ملاحظات

① إذا كان أ ⊂ ب فإن:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

② إذا كان ل(أ) = ل(أ̄) فإن: ل(أ) = $\frac{1}{2}$

تدريب ١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية في حيث:

ل(أ) = $\frac{3}{8}$ ، ل(ب) = $\frac{3}{4}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{4}$ أوجد:

① ل(أ ∪ ب) ② ل(أ − ب) ③ ل(أ̄) ④ ل(أ̄ ∩ ب̄)

الحل

لاحظ عناصر المسائل يجب يكون موجود: ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب) لانهم الأساس في أي مطلوب آخر

ل(أ)	$\frac{3}{8}$
ل(ب)	$\frac{3}{4}$
ل(أ ∩ ب)	$\frac{1}{4}$
ل(أ ∪ ب)	$\frac{7}{8}$

① ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{8}}$

② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

= $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$

③ ل(أ̄) = ١ − ل(أ) = $1 - \frac{3}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}$

٤) ل(أَ ∩ بَ) = ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب)

$= ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

تدريب ٢ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ − ب) = $\frac{٣}{٨}$ أوجد:-

١) ل(أَ ∩ بَ)   ٢) ل(أَ ∪ ب)

الحل

لاحظ أن: يجب تكوين الجدول كامل

ل(أ)	ل(ب)	ل(أ ∩ ب)	ل(أ ∪ ب)
$\frac{٥}{٨}$	$\frac{١}{٢}$	?? $\frac{١}{٤}$	?? $\frac{٧}{٨}$

(i) ∵ ل(أ − ب) = $\frac{٣}{٨}$

∴ ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∴ $\frac{٥}{٨}$ − ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ⇐ ل(أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٨} - \frac{٣}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

(ii) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$= \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

١) ∴ ل(أَ ∩ بَ) = ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − $\frac{٧}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

٢) ل(أَ ∪ ب) = ل(أَ) + ل(ب) − ل(أَ ∩ ب)

= ١ − ل(أ) + ل(ب) − ل(ب − أ)

= ١ − ل(أ) + ل(ب) − ل(ب) + ل(أ ∩ ب)

$= ١ - \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٤}$

∴ ل(أَ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$

تدريب ٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٣ ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ٧٢ر٠ أوجد ل(أ) ، ل(ب) :

١) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين ٢) إذا كان أ ⊂ ب

الحل

لاحظ أن : المسألة هنا مشروطة [لها شروط] لذلك يجب أن نأخذ بشروط المسألة والحل حسب المطلوب والمعلوم

نفرض : ل(أ) = س ∴ ل(ب) = ٣س

١) الشرط : أ ، ب حدثين متنافيين

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

∴ ٧٢ر٠ = س + ٣س

٧٢ر٠ = ٤س ⟸ س = ٧٢ر٠ / ٤ ⟸ س = ١٨ر٠

∴ ل(أ) = ١٨ر٠ ، ل(ب) = ٥٤ر٠

٢) الشرط : أ ⊂ ب

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

∴ ٧٢ر٠ = ٣س ⟸ س = ٢٤ر٠

∴ ل(أ) = ٢٤ر٠ ، ل(ب) = ٧٢ر٠

تدريب ٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان احتمال وقوع الحدث أ = ٥ر٠ ، واحتمال وقوع الحدث ب = ٦ر٠ ، واحتمال عدم وقوع الحدثين معاً = ٨ر٠ أوجد :-

١) احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معاً

٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

٣) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

المعطيات :- احتمال وقوع الحدث أ $ل(أ) = ٥ر٠$

احتمال وقوع الحدث ب $ل(ب) = ٦ر٠$

احتمال عدم وقوع الحدثين معاً $ل(\overline{أ \cap ب}) = ٨ر٠$

∵ $ل(\overline{أ \cap ب}) = ٨ر٠$

∴ $١ - ل(أ \cap ب) = ٨ر٠ \Leftarrow ل(أ \cap ب) = ١ - ٨ر٠ = ٢ر٠$

$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= ٥ر٠ + ٦ر٠ - ٢ر٠ = ٩ر٠$

(١) احتمال وقوع الحدث أ والحدث ب معاً $ل(أ \cap ب) = ٢ر٠$

(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل $ل(أ \cup ب) = ٩ر٠$

(٣) احتمال وقوع الحدث ب وعدم وقوع الحدث أ

$ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= ٦ر٠ - ٢ر٠ = ٤ر٠$

تدريب: فصل دراسي به ٣٠ طالباً منهم ١٨ يدرسون الاحصاء ، ١٠ يدرسون الكمبيوتر ، ٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل أختير طالباً عشوائياً إحسب احتمال أن يكون الطالب المختار :-

(١) ممن يدرسون الكمبيوتر والإحصاء (٢) ممن يدرسون الكمبيوتر فقط

(٣) لا يدرس الكمبيوتر (٤) لا يدرس أي من المادتين

الحل

نفرض دارس الكمبيوتر = أ ∴ $ل(أ) = \frac{١٠}{٣٠}$

، دارس الإحصاء = ب ∴ $ل(ب) = \frac{١٨}{٣٠}$

٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل ∴ $ل(أ \cup ب) = \frac{٢٢}{٣٠}$

(١) $ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$

∴ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٠}{٣٠}$ + $\frac{١٨}{٣٠}$ − $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{١}{٥}$

② ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١٠}{٣٠}$ − $\frac{٦}{٣٠}$ = $\frac{٤}{٣٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

③ ل(أ̄) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{٢٠}{٣٠}$ = $\frac{٢}{٣}$

④ ل(أ̄ ∩ ب̄) = ل$\overline{(أ ∪ ب)}$ = ١ − ل(أ ∪ ب)

= ١ − $\frac{٢٢}{٣٠}$ = $\frac{٨}{٣٠}$ = $\frac{٤}{١٥}$

تدريب ٦ يصوب جنديان في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٥ واحتمال أن يصيب الجندي الثاني الهدف هو ٠,٦ واحتمال أن يصيب الجنديان الهدف معاً هو ٠,٣ أوجد احتمال:

① أن يصيب الجندي الأول الهدف فقط

② أن يصيب أحدهما الهدف على الأقل.

الحل



تدريب ٧

(١) احتمال الحدث المؤكد =

(أ) ϕ (ب) ف (جـ) صفر (د) ١

(٢) إذا كان : ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١ فإن ل($\bar{أ}$ ∩ $\bar{ب}$) =

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,١

(٣) إذا كان : أ ∩ ب = ϕ ، ل($\bar{أ}$) = ٠,٧ ، ل($\bar{ب}$) = ٠,٤ فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٣ (جـ) ١ (د) ٠,٩

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، أ ⊃ ب فإن :
ل(أ ∪ ب) =

(أ) ل(أ) (ب) ل(ب) (جـ) ل(أ) + ل(ب) (د) ل(أ ∩ ب)

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما حيث :
ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٨ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن : ل($\bar{أ}$) + ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٧ (ب) ٠,٩ (جـ) ١,٦ (د) ١

(٦) إذا كان ف = {أ ، ب ، جـ} فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان :
ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٥}$ فإن ل(جـ) =

(أ) $\frac{٤}{١٥}$ (ب) $\frac{٢}{١٥}$ (جـ) $\frac{١}{١٥}$ (د) $\frac{١١}{١٥}$

(٧) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ب ⊂ أ
وكان ل(أ) = ٠,٩ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن : ل(أ − ب) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

موقع الدكتور
محمد رزق
التعليمي



امسح الباركود بالموبيل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه



حمل التطبيق الأن




كورسات ونتائج امتحانات


ملازم ثانـــــوي


ملازم اعدادي


ملازم ابتدائي




موقع الدكتور محمد رزق
Dr.Mo.RizK